

PROVA DE AVALIAÇÃO DE CONHECIMENTOS - 2020**MATEMÁTICA**

Alínea c) do n.º 1 do artigo 13.º-C do Decreto-Lei n.º 113/2014, de 16 de julho, republicado pelo Decreto-Lei n.º 11/2020, de 2 de abril.

Duração total da Prova: 120 minutos (Português + Matemática).

Tolerância: 30 minutos

6 Páginas

Para cada resposta, identifique o item a que corresponde.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de calculadora científica.

Não é permitido o uso de corretor.

Risque o que pretende que não seja classificado.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

O enunciado da prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos efetuados e justificações. Sem informação do contrário, apresente o valor exato do resultado.

Utilize folhas diferentes para responder à parte geral de português e à parte específica de matemática.

Formulário

Probabilidades

X é uma variável aleatória discreta, de valores x_i com probabilidades p_i , $1 \leq i \leq n$

- Média de X
$$\mu = p_1x_1 + p_1x_2 + \dots + p_nx_n$$
- Desvio padrão de X
$$\sigma = \sqrt{p_1(x_1 - \mu)^2 + p_2(x_2 - \mu)^2 + \dots + p_n(x_n - \mu)^2}$$

Probabilidade condicionada de A sabendo que ocorreu B

- $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Estatística

Sendo x_i valores observados e dimensão da amostra N

- Média
$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$$
- Variância
$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2}{N-1}$$
- Desvio padrão
$$s = \sqrt{s^2}$$

Derivadas

- $tmv_{[a,b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
- $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$
- $(u + v)' = u' + v'$
- $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$
- $(u^n)' = n \times u^{n-1} \times u'$ ($n \in \mathbb{R}$)
- $(\text{sen } u)' = u' \times \text{cos } u$
- $(\text{cos } u)' = -u' \times \text{sen } u$
- $(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\text{cos}^2 u}$
- $(e^u)' = u' \times e^u$
- $(a^u)' = u' \times a^u \times \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)
- $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
- $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \times \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Modelos de funções de crescimento

Um modelo de crescimento exponencial é definido por uma função do tipo

- $f(x) = a \times b^x, b > 1$

Um modelo de decrescimento exponencial é definido por uma função do tipo

- $f(x) = a \times b^x, 0 < b < 1$

O modelo logístico é uma função do tipo

- $f(x) = \frac{c}{1+a \times e^{-bx}}, a, b, c \in \mathbb{R}^+$

Regras operatórias das potências e dos logaritmos

Sejam $a \neq 0$ e $b \neq 0$:

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $a^n \times b^n = (a \times b)^n$
- $a^n : a^m = a^{n-m}$
- $a^n : b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
- $(a^n)^m = a^{n \times m}$
- $a^0 = 1$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, a \in \mathbb{R}^+, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$

Sejam $p \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R}^+$ e $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$:

- $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$
- $\log_a (x \times y) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a x^p = p \times \log_a x$
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

Trigonometria

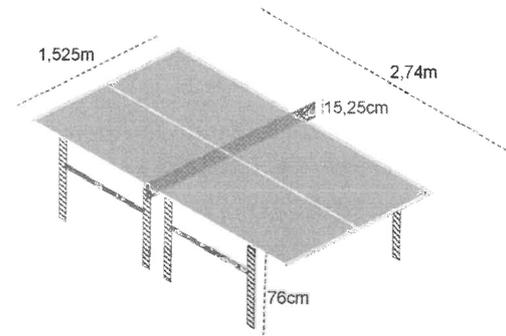
- Fórmula fundamental da trigonometria: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$
- $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- $\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \vee x = \pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \pm \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Álgebra

- $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, a \neq 0$

REDE NORTE

1. No ténis de mesa, a superfície de jogo tem o formato retangular, com 2,74 m de comprimento e 1,525 m de largura, e está 76 cm acima do chão, em plano horizontal. Uma rede vertical de 15,25 cm de altura, paralela às linhas de fundo, divide a superfície de jogo em dois campos iguais.

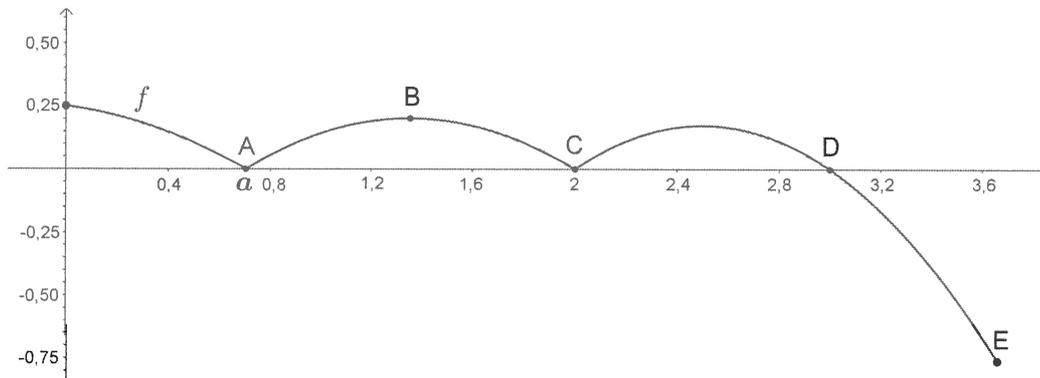


A superfície de jogo poderá ainda conter uma linha central branca, paralela às linhas laterais, que divide cada campo em duas partes iguais.

O gráfico cartesiano seguinte, da função f , representa uma demonstração do início de uma jogada, denominada serviço, cujas regras impõem que a bola toque primeiro o campo do servidor, passe por cima da rede e toque o campo do recebedor.

No gráfico é apresentada a altura da bola, em metros, relativamente à superfície de jogo, de acordo com a distância percorrida, em metros, relativamente ao ponto médio da linha de fundo do campo do servidor.

As coordenadas dos pontos B e E, arredondadas às centésimas, são: B(1,35; 0,20) e E(3,67; -0,76)



- 1.1. Indique o domínio da função f .
- 1.2. Sabendo que no intervalo $[a, 2]$ o gráfico de f corresponde a um arco de parábola cujo vértice é o ponto B, o valor de a é:
- (A) 0 (B) 0,6 (C) 0,65 (D) 0,7
- 1.3. Os pontos C, D e E pertencem ao arco de parábola que é parte do gráfico da função g , definida por $g(x) = -0,68x^2 + 3,4x - 4,08$.

Determine a abcissa do ponto D.

2. O capital da empresa NORTE no ano de 2019 pode ser representado pela função:

$$C(t) = 0,3t^3 - 4t^2 + 100, \text{ com } C \text{ em milhares de euros e } t \text{ em meses } (0 \leq t \leq 12).$$

- 2.1. A taxa média de variação no intervalo $[10,12]$ é:

- (A) 42,4 milhares de euros (C) 21,2 euros
 (B) 21,2 milhares de euros (D) 36,4 milhares de euros

- 2.2. Estude a função C quanto à monotonia e determine o capital mínimo obtido, em milhares de euros, arredondado às centésimas.

3. Sabendo que $\log_5 \frac{\sqrt{125}}{25} = a$, com $a \in \mathbb{R}$, o valor de a é:

- (A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) -2 (D) $-\frac{1}{2}$

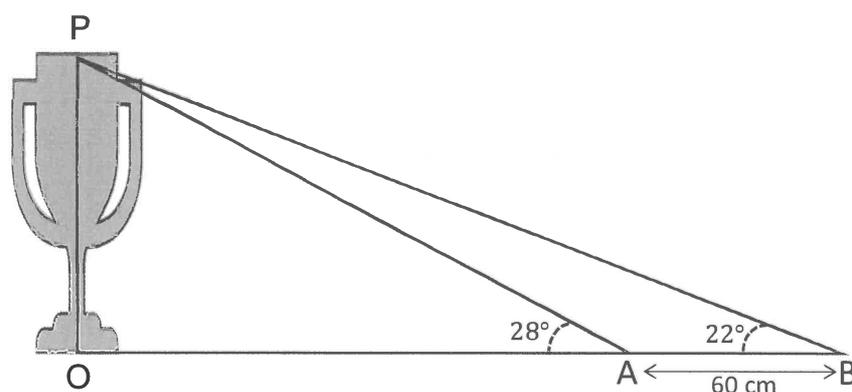
4. Segundo uma recolha de dados recente, o número de indivíduos de uma população de leões de uma determinada savana, t anos após 2020, pode ser modelada através da seguinte função logística:

$$P(t) = \frac{8220,123}{1 + 9,11e^{-0,03t}}$$

Será possível nalgum momento o número de leões ser 9000? Justifique convenientemente a sua resposta.

5. Com os dados apresentados na figura, determine a altura da taça.

Apresente o resultado arredondado às unidades. Nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.



6. Um laboratório farmacêutico criou um teste para o rastreio de uma determinada doença. Sabe-se que a probabilidade de uma pessoa padecer dessa doença é de 5%. Sabe-se que o teste apresenta um resultado positivo em 90% das pessoas que padecem da doença. A probabilidade de uma pessoa selecionada ao acaso ter a doença, sabendo que o teste deu positivo, é igual a 18%. Foi selecionada aleatoriamente uma pessoa para a realização do teste. Determine a probabilidade de o teste ser positivo.
7. Lança-se um dado cúbico equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, duas vezes consecutivas e regista-se o número da face que ficou voltada para cima em cada um dos lançamentos. Sejam a e b os números obtidos no primeiro e no segundo lançamentos, respetivamente. Qual a probabilidade dos valores de a e b satisfazerem a equação $\log(a + b - 1) = 0$?
- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{36}$ (C) $\frac{1}{72}$ (D) $\frac{3}{100}$
8. O João pesou 20 laranjas na mesma balança. Os pesos obtidos foram todos distintos. Os valores das medidas de localização média e mediana (em gramas) foram, respetivamente, $\bar{x} = 198,2$ g e $\tilde{x} = 210,2$ g. Pode-se afirmar que:
- (A) Metade das laranjas têm peso inferior ou igual a 210,2 g
 (B) Metade das laranjas têm peso inferior ou igual a 198,2 g
 (C) O peso mais frequentemente observado foi 210,2 g
 (D) O peso mais frequentemente observado foi 198,2 g

FIM

Item										
1.1	1.2	1.3	2.1	2.2	3	4	5	6	7	8
6	8	10	8	12	8	8	12	12	8	8
Cotação (em pontos)										