PROVA DE AVALIAÇÃO DE CONHECIMENTOS - 2022

MATEMÁTICA

Versão A

Alínea c) do n.º 1 do artigo 13.º-C do Decreto-Lei n.º 113/2014, de 16 de julho, republicado pelo Decreto-Lei n.º 11/2020, de 2 de abril.

Duração total da Prova: 120 minutos (Português + Matemática).

Tolerância: 30 minutos

6 Páginas

Para cada resposta, identifique o item a que corresponde.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de calculadora científica.

Não é permitido o uso de corretor.

Risque o que pretende que não seja classificado.

A cotação de cada item é de 5 pontos.

O enunciado da prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Utilize folhas diferentes para responder à parte geral de português e à parte específica de matemática.

Formulário

Probabilidades

X é uma variável aleatória discreta, de valores x_i com probabilidades p_i, $1 \leq i \leq n$

- Média de X
  $\mu = p_1 x_1 + p_1 x_2 + \cdots + p_n x_n$
- Desvio padrão de X
  $\sigma = \sqrt{p_1(x_1-\mu)^2 + p_2(x_2-\mu)^2 + \cdots + p_n(x_n-\mu)^2}$

Probabilidade condicionada de A sabendo que ocorreu B

- $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

Estatística

Sendo x_i valores observados e dimensão da amostra N

- Média
  $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N}$
- Variância
  $s^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \cdots + (x_N-\bar{x})^2}{N-1}$
- Desvio padrão
  $s = \sqrt{s^2}$

Derivadas

- $tmv_{[a,b]} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
- $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$
- $(u+v)' = u' + v'$
- $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$
- $(u^n)' = n \times u^{n-1} \times u' \quad (n \in \mathbb{R})$
- $(sen\, u)' = u' \times cos\, u$
- $(cos\, u)' = -u' \times sen\, u$
- $(tg\, u)' = \frac{u'}{cos^2 u}$
- $(e^u)' = u' \times e^u$
- $(a^u)' = u' \times a^u \times ln\, a \;\; (a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$
- $(ln\, u)' = \frac{u'}{u}$
- $(log_a u)' = \frac{u'}{u \times ln\, a} \;\; (a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$

Modelos de funções de crescimento

Um modelo de crescimento exponencial é definido por uma função do tipo

- $f(x) = a \times b^x, b > 1$

Um modelo de decrescimento exponencial é definido por uma função do tipo

- $f(x) = a \times b^x, 0 < b < 1$

O modelo logístico é uma função do tipo

- $f(x) = \frac{c}{1+a\times e^{-bx}}, a, b, c \in \mathbb{R}^+$

Regras operatórias das potências e dos logaritmos

Sejam $a \neq 0$ e $b \neq 0$:

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $a^n \times b^n = (a \times b)^n$
- $a^n : a^m = a^{n-m}$
- $a^n : b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
- $(a^n)^m = a^{n\times m}$
- $a^0 = 1$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},\ a \in \mathbb{R}^+, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$

Sejam $p \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R}^+\ e\ a, b \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$:

- $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$
- $\log_a(x \times y) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a x^p = p \times \log_a x$
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

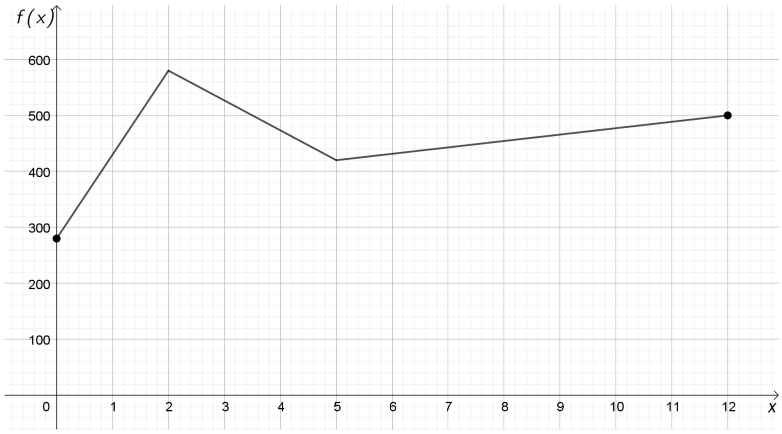
Trigonometria

- Fórmula fundamental da trigonometria: $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
- $1 + \frac{1}{tg^2 x} = \frac{1}{sen^2\, x}$
- $1 + tg^2 x = \frac{1}{cos^2\, x}$
- $tg\ x = \frac{sen\ x}{cos\ x}$
- $sen\ x = sen\ \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \ \vee\ x = \pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $cos\ x = cos\ \alpha \Leftrightarrow x = \pm\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $tg\ x = tg\ \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Álgebra

- $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, a \neq 0$

1. A *Ruta del Cares* é um famoso percurso pedestre localizado em Espanha, nas Astúrias, e tem uma extensão aproximada de 12 quilómetros. Considere a função f representada graficamente, em que $f(x)$ corresponde à altitude, em metros, e x à distância percorrida, em quilómetros, ao longo do percurso.



1.1. No contexto da situação, o domínio da função f pode ser:

(A) $[0,12]$ **(B)** $[0,+\infty[$ **(C)** $[275,570]$ **(D)** $\{0,12\}$

1.2. Podemos afirmar que:

(A) A equação $f(x) = 500$ tem uma única solução.

(B) A função f é crescente no seu domínio.

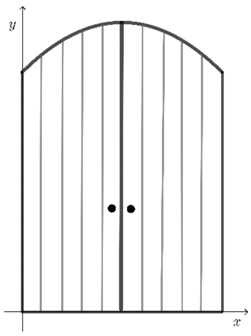
(C) O conjunto solução da inequação $f(x) \geq 500$ é $\{2,3\}$.

(D) A função f tem máximo e mínimo absolutos.

1.3. Um dos ramos da função f pode ter como expressão analítica:

(A) $y = 150x$ **(B)** $y = \frac{160}{3}x + \frac{2060}{3}$ **(C)** $y = \frac{80}{7}x + \frac{2540}{7}$ **(D)** $y = \frac{80}{7}x$

2. A figura representa um portão de uma garagem cuja forma é a de um retângulo com uma parte em cima limitada por um arco de parábola, em que foi instalado um referencial cartesiano. A distância ao solo, em metros, de cada um dos pontos do arco do portão é dado pela função h, definida pela expressão (com x em metros): $h(x) = -0{,}4x^2 + x + 3$



2.1. A altura do portão, em metros, no sítio onde estão as dobradiças, isto é, no local onde está colocado o eixo Oy é:

(A) 0 **(B)** $h(2)$ **(C)** 3 **(D)** 3,625

2.2. A altura máxima do portão, em metros, é:

(A) 1,25 **(B)** $h(1{,}25)$ **(C)** 3 **(D)** $h(2{,}5)$

2.3. Uma carrinha, com a forma de um paralelepípedo, pretende entrar no portão. Quais as dimensões possíveis da carrinha?

(A) 2 metros de largura e 3,3 metros de altura

(B) 2 metros de largura e 3,2 metros de altura

(C) 2,1 metros de largura e 3,2 metros de altura

(D) 2,1 metros de largura e 3,19 metros de altura

3. O valor de $\log_3 27 - \log_3 3 - 3$ é:

(A) 21 **(B)** -1 **(C)** 3 **(D)** 27

4. Sabendo que $\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, então tem-se como valores possíveis para o seno e o cosseno:

(A) $\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{3}$ e $\cos\alpha = 3$
(B) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{2}$ e $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$
(C) $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{1}{2}$ e $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
(D) $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos\alpha = \frac{1}{2}$

5. Relativamente à função $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{2x}$, podemos afirmar que:

(A) Tem um zero **(B)** É crescente **(C)** Não tem zeros **(D)** É não monótona

6. Numa determinada comunidade o crescimento populacional é dado por uma função logística P que relaciona o tempo t, em meses, que decorre a partir do instante inicial, com o número de indivíduos. A função P é definida por $P(t) = \frac{10000}{1+10e^{-0,3t}}$. Sabe-se que, com o decorrer do tempo, o número de indivíduos tende a estabilizar em torno de a. O valor de a é:

(A) 10000 **(B)** 20000 **(C)** 30000 **(D)** 40000

7. A partir de uma folha retangular, cujos lados medem 1 metro e 2 metros, podemos construir uma caixa em forma de paralelepípedo, cortando em cada um dos cantos um quadrado de lado x (como se mostra na figura) e dobrando, em seguida, ao longo dos segmentos representados com traço interrompido.

7.1. A expressão que permite calcular o volume da caixa, em função de x, pode ser dada por:

(A) $V(x) = (2-2x)\cdot(1-2x)\cdot x$
(B) $V(x) = (2-2x)\cdot(1-x)\cdot x$
(C) $V(x) = (2-2x)\cdot(1-2x)$
(D) $V(x) = (2-2x)\cdot(3-2x)$

7.2. O valor exato de x para o qual o volume da caixa que se obtém é máximo é:

(A) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}$ **(B)** $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}$ **(C)** 1 **(D)** $\frac{1}{2}$

8. A procura de cafés, numa determinada pastelaria, depende do preço de cada café x (em cêntimos), e pode ser representada pela função procura: $P(x) = 100-(x-90)^2$. A taxa média de variação da procura de cafés resultante da subida de preço de 87 para 97 cêntimos é:

(A) 4 **(B)** 2 **(C)** -2 **(D)** -4

9. O declive da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = 4x^3 - 100x^2 + 600x$, no ponto de abcissa $x = 10$, é:

(A) -200 **(B)** -20 **(C)** 200 **(D)** 20

10. Foram registados os pesos, em kg, de 14 estudantes de uma turma. Os valores em kg obtidos e ordenados por ordem crescente foram:

56,0	57,1	59,6	60,4	60,5	60,9	61,2
62,2	63,8	64,2	64,5	64,6	65,1	65,2

10.1. Qual o valor do 3º quartil?

(A) 60,4 kg **(B)** 62,2 kg **(C)** 61,2 kg **(D)** 64,5 kg

10.2. Qual o peso médio dos estudantes (arredondado às décimas)?

(A) 60,4 kg **(B)** 61,8 kg **(C)** 62,9 kg **(D)** 63,1 kg

11. Uma turma do 12º ano tem 20 alunos, dos quais 9 são rapazes e 11 raparigas. Sabe-se que somente 5 alunos nasceram no Porto. Destes, 2 são rapazes e 3 são raparigas. Qual a probabilidade de, escolhendo um rapaz ao acaso, ele não ter nascido no Porto?

(A) $\frac{2}{20}$ **(B)** $\frac{7}{20}$ **(C)** $\frac{2}{9}$ **(D)** $\frac{7}{9}$

12. Sejam A e B dois acontecimentos associados a uma experiência aleatória. Sabe-se que:

$$P(B) \neq 0;\ P(A|B) = 0{,}4;\ P(A \cap \bar{B}) = P(A) - 0{,}1$$

Qual o valor de $P(B)$?

(A) 0,25 **(B)** 0,40 **(C)** 0,50 **(D)** 0,75

13. Considere a seguinte tabela de distribuição de probabilidade de uma variável aleatória X:

$X = x_i$	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	a	$2a$	b	a	b

Sabendo que a e b são números reais e que $P(X = 0) = 2 \times P(X = 2)$, qual o valor de $P(X = 1)$?

(A) 0,2 **(B)** 0,4 **(C)** 0,6 **(D)** 0,8

14. Sejam A, B e C três acontecimentos não nulos de um espaço de resultados Ω. Sabendo que

$$P(A) = 0{,}6;\ P(B) = 0{,}7;\ P(A|C) = 0{,}5;\ P(B|C) = 0{,}6,$$

assinale a opção correta:

(A) A e B são acontecimentos incompatíveis (isto é $A \cap B = \emptyset$).

(B) A e C são acontecimentos independentes.

(C) B e C são acontecimentos independentes.

(D) $P(A|C) = P(\bar{A}|C)$